實驗數據作圖原則

物理定律和原理是用以描敘物理現象和物理量間的變化關係。物理實驗經常探討一系統中兩物理量，在其他物理量保持不變的條件下，歸納此兩物理量間的變化關係。如波以耳定律(Boyle's law)是描述定量的稀薄氣體(n =定值)系統，在恆溫(T =定值)下，氣體的壓力與其體積間的變化關係遵守 $PV = nRT$ 的公式。

物理量之間的變化關係通常可以用三種形式來表示：(l)文字描述，(2)方程式，及(3)圖形。至於使用那種方法為宜，則視用途而定。若需要求算物理量的大小，則其中以用方程式表示最方便、最正確；若想了解一個量隨另一個量的變化趨勢，則用圖形表示最恰當，因圖形表示法有下列優點：

(1) 圖形的變化，一目了然，令人印象最深刻；

(2) 可經由內插法或外插法，獲得實驗測量點以外的數值；

(3) 由圖形的趨勢，易於檢查出不準確、甚至錯誤的實驗數據；

(4) 可預測在有效的實驗條件下，但儀器測量不到的範圍內，物理量的趨勢與極限。如估計在定量定壓下，溫度為絕對零度時氣體的體積大小。但必須注意此種預測所得的結果不一定完全可靠。

(5) 有些實驗結果因數據不足或結果太複雜，很難以方程式表示，更不容易以文字描述清楚，最後僅能以圖形表示。

由上可知數據圖形化的重要性，故幾乎所有實驗測量所得的數據，通常都會作圖。但該如何作圖，如何做出一張具充分表達能力且有用的數據圖也是一門學問，必須經常下功夫多方練習，才能累積出豐富的作圖經驗。以下簡單地說明**一般作圖的基本原則**和**如何根據實驗數據以最小方差擬合作圖法**。

1. 作圖的一般基本原則：

(1) **作圖方式**：可用繪圖紙或用電腦繪圖軟體製圖。若是用繪圖紙，應使用正規的標準繪圖紙，如市售的方格紙、半對數紙或全對數紙等。不宜隨便拿張空白紙，自己手繪Ｘ，Ｙ軸和格線作為繪圖紙，如此所得的圖形精確度很低。學校有提供 Microsoft excel 或 origin 試算軟體的校園使用權，可下載使用，藉以繪圖數據圖。

(2) **座標軸設定：**

(a) 若是一般 X-Y 笛卡式座標圖形，座標軸通常取水平Ｘ軸和垂直Ｙ軸，若是圓極式圖形(Polar diagram)，則取徑向Ｘ軸和弧角θ軸作為座標軸。

(b) 欲繪製兩個物理量間的變化關係圖，則需先選擇其中一個物理量做為自變數(independent variable)，另一個為因變數(dependent variable)。

(c) 習慣上，取自變數沿水平 X 軸表示，稱為橫座標(abscissa)；因變數則沿鉛垂的 Y 軸，稱為縱座標(ordinate)。

(d) 通常取實驗時用以作為調變控制的物理量(實驗調變參數)作為自變數，沿橫座標標示；因自變量值改變，而隨之變動的待測物理量做為因變數，縱座標數值標示。

(e) 當兩物理量的相互依變值已有一組完整的實驗數據對，若擬互換兩物理量的自變和因變角色，以探討互換後的變化關係，可直接互換兩座標軸所代表的物理量即可得兩物理量的反函數關係圖。

(f) 例如：在驗證牛頓第二運動定律的實驗中，擬以實驗證明物體的運動公式：

$$\text{作用力 } F = \text{運動體質量 } m \times \text{ 運動體的加速度 } a$$

時，若考慮運動體的質量 m 固定，實驗時是改變作用力大小 F，測運動體的加速度 a。則作圖時，通常會以 F 為橫座標，a 為縱座標。並根據數據描繪出 a 隨 F 的變化關係,即得 $a(F)$ 函數關係圖。亦可以為 a 橫座標，F 為縱座標，描繪 F 隨 a 的變化關係，得 $F(a)$ 關係圖。

(3) **座標軸標示(Label)**：務必標示清楚兩座標軸所代表的**物理量名稱**、**變數符號**及**單位**，例如作用力 F (NT) 和 加速度 a (m/s^2)。且這些標示內容要與實驗報告中所用的名稱和符號相同。

(4) **座標軸刻度(Scale)**：

(a) 橫軸與縱軸的刻度不需相同。

(b) 如果數據是很大或很小的數值，可以將刻度取為 $\times 10^n$，n 是可為正整數、也可為負整數值，如 $\times 10^4$ 或 $\times 10^{-6}$ 等。

(c) 宜取所使用之單位的 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5 或 10 等倍率的刻度值，方便判斷實驗所測數據是否標對位置，並有利於以內/外插法讀取非實驗點的數據點。

(d) 儘量避免取 3, 7 或 9 等倍率的刻度，因為以這些倍率作刻度，很難從圖形上正確地讀出數據點的值。

(5) 兩座標軸交點的座標點：交點座標並不一定要定為零，即不一定要是(0, 0)、(x, 0)或(0, y)。兩軸交點的設定原則主要以能較精確地、且清楚地將實驗結果呈現出來為考量，故座標軸的交點一般以擬呈現之數據的數量範圍開始標起即可。

(6) 圖面大小設定：以能充分且清晰呈現所有數據，和數據的準確程度為設定標準。若以方格紙繪圖建議圖形應分佈在整張紙面上。但如果數據只有 2 位有效數字，則不需將圖形放大太多，可能的話使圖中的數據點至少可呈現 3 位有效數字。

(7) 實驗數據點位置標示：

(a) 於座標系中，找出數據之平均值的位置，以此點為中心，再以實驗數據的平均標準偏差值為半徑，圈出一個小圓，此即實驗數據測量結果在圖中的最佳標示方式。由此點的中心位置和半徑大小可知分別知道數據的平均值和誤差範圍。

(b) 可將數組不同實驗條件或由不同實驗者所得的數據畫在同一個圖面內，以供比較，但每一實驗條件下的數據，應各用不同的小符號，如小叉，“×”或小三角形“△”分別表示，以利區別。

(c) 數據點間的連線方法和注意事項：

(d) 不同條件所得的數據連線也應以不同型式的線條表示，如實線(solid line，或稱 full line)——，點線(dotted lin) ......，節線(dashed line) -----，點節線(dash-dotted line)一·一·一等等，或用不同顏色的線表示。

(e) 在圖形空白處須註明各符號或顏色所代表的實驗條件，如 $F=ma$ 實驗，○：運動體質量 $m=100$ g，△：$m=200$ g 等。但為助教批改報告方便，最好不要用紅色筆作圖。

(8) 實驗誤差的表示方式：

(a) 作圖時應標明實驗結果之誤差，通常用一短鉛垂線或 I 字形，中央通過數據點表示，即“ψ”或“Φ”。

(b) 中央小圓圈位置為實際測得的實驗數據點$(x，y)$，鉛垂短線的上、下端點的位置分別為$(x，y+\triangle y)$及$(x，y-\triangle y)$，以表示數據 y 的誤差範圍。

(c) 一般以平均標準差表示，參考實驗 1 基本度量與誤差的定義。

(d) X 方向有誤差者，可依相同方式處理。

(e) 在某些實驗中(比較少見中)，誤差可能不是上下相等。例如$10\pm^{4}_{2}$，則小圓圈位置在“10”處，鉛垂線從“14”，延長至 “8”為止。

(9) 實驗數據擬合線：

(a) 由平均通過各個數據點或其附近的曲線(包括直線)之形狀、斜率和截距，可以提供具物理意義的有用資料。

(b) 擬合曲線的求取法：通常使用最小方差擬合法(least square fitting)。

(c) 若無特殊明確的原因，計算時應各數據並重。

(d) 一些看來明顯偏離數據變化趨勢較遠的數據點，可能是不正確的數據點，建議在計算擬合線的關係函數時，可略去不用於計算中。

(10)實驗曲線圖簡單描述：在圖內空白之處，詳細填寫上有關這個圖形的相關所有資料，包括圖形的名稱、實驗條件之簡單說明，並建議註明實驗日期。

(11)圖序與圖說：以一段簡單扼要的文字說明整張圖中所有數據曲線的意義和分析結果，與此圖形所呈現的物理意義。

2. 最小方差擬合法(Least square fitting method)：

這個方法是找一條曲線，以 $y\rightarrow f(x)$ 之多項式表示，使所有數據到曲線之鉛垂距離的平方總和為最小。假設“(x_i，y_i)”表示數據點，$f(x)$表示曲線在 x 點的函數值。通常自變數 x_i 的誤差較小，所以數據點到曲線鉛垂距離可以寫成$\left|f(x_i)-y_i\right|$。。所謂最小方差擬合法，是以 $f(x)$ 必須滿足 $\chi^2\equiv\sum[f(x_i)-y_i]^2$ 的值為極小的條件，來求出 $f(x)$ 的形式—也就是求出 $f(x)$函數中各參數的值。根據統計理論，χ^2 的定義應寫成：

$$\chi^2\equiv\sum_i[\frac{f(x_i)-y_i}{\sigma_i}]^2 \tag{1}$$

式中σ_i為實驗值y_i的標準差。為簡化演算，以一次式，即直線的最小方差擬合法為例來說明：

假設有n個實驗數據(x_i，$y_i \pm \sigma_i$) ，其最佳描述直線為$f(x)=ax+b$，則$f(x_i)=ax_i+b_0$由定義(l)可知，為了使

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^{n}[\frac{(ax_i+b)-y_i}{\sigma_i}]^2 \tag{2}$$

為極小，a及b必須滿足的條件為：

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial a}=0 \Rightarrow a\sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}+b\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}-\sum_i \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial b}=0 \Rightarrow a\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}+b\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}-\sum_i \frac{y_i}{\sigma_i^2}=0 \tag{4}$$

上式中，$\partial\chi^2/\partial a$是一種偏微分，將$\chi^2$當做$a$的函數，把其餘的變數當做常數，取微分。在此例中$b$為常數。由(3)式及(4)式，可以解得$a$ 和b:

$$a=\frac{1}{\Delta}(\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}\sum_i \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}-\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}\sum_i \frac{y_i}{\sigma_i^2}) \tag{5}$$

$$b=\frac{1}{\Delta}(\sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\sum_i \frac{y_i}{\sigma_i^2}-\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}\sum_i \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}) \tag{6}$$

其中

$$\Delta \equiv \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}\sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}-(\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2})^2 \tag{7}$$

依照(5)至(7)式，求得的斜率a及截距b，將此直線畫在數據圖上。如此可以得到最接近各數據點的曲線，完成作圖。